

STATIQUE DES SOLIDES

MODELISATION DES ACTIONS MECANQUES

1 Modélisation mathématique

1.1 Définition

On appelle **action mécanique** toute cause susceptible :

- de maintenir un corps au repos.
- de créer un mouvement.
- de déformer un corps.

1.2 Classification

On distingue deux types d'actions mécaniques :

- **actions mécaniques à distance** (champ de pesanteur ; champs électromagnétique ; ...)
 - **actions mécaniques de contact** (liaisons entre solides ; ...)
- Dès que deux solides S_1 et S_2 sont en contact ; S_1 exerce sur S_2 une action mécanique dite de contact.

Notion d'action mécanique intérieure ou extérieure :

Soient 3 corps S_1 ; S_2 et S_3 en contact de la façon ci-contre:

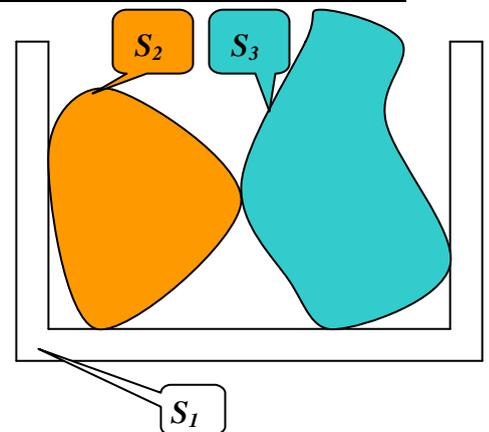
S_1 est en contact avec S_2 et avec S_3

S_2 est en contact avec S_1 et avec S_3

Si l'on sépare l'espace E en deux de la façon suivante :

$$E = E_1 \cup \bar{E}_1 \text{ avec } E_1 = S_2 \cup S_3$$

Alors : S_2 et S_3 appartiennent à E_1 , et S_1 appartient à l'extérieur de E_1 que l'on a noté \bar{E}_1 .



Définitions :

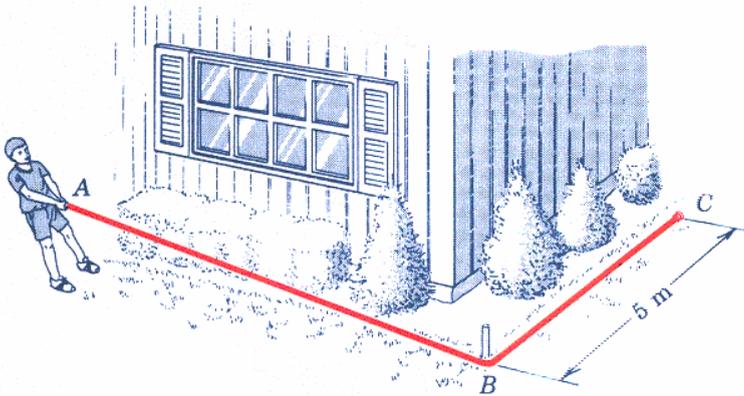
- L'action mécanique de S_1 sur S_2 est dite : extérieure à E_1 (car entre un élément de E_1 et un élément de \bar{E}_1)
- L'action mécanique de S_3 sur S_1 est dite : intérieure à E_1 (car entre deux éléments de E_1)

1.1 Premier principe de la statique

1.3.1 Force

Certaines actions mécaniques peuvent être modélisée par un vecteur lié :

Exemple : Tuyau d'arrosage



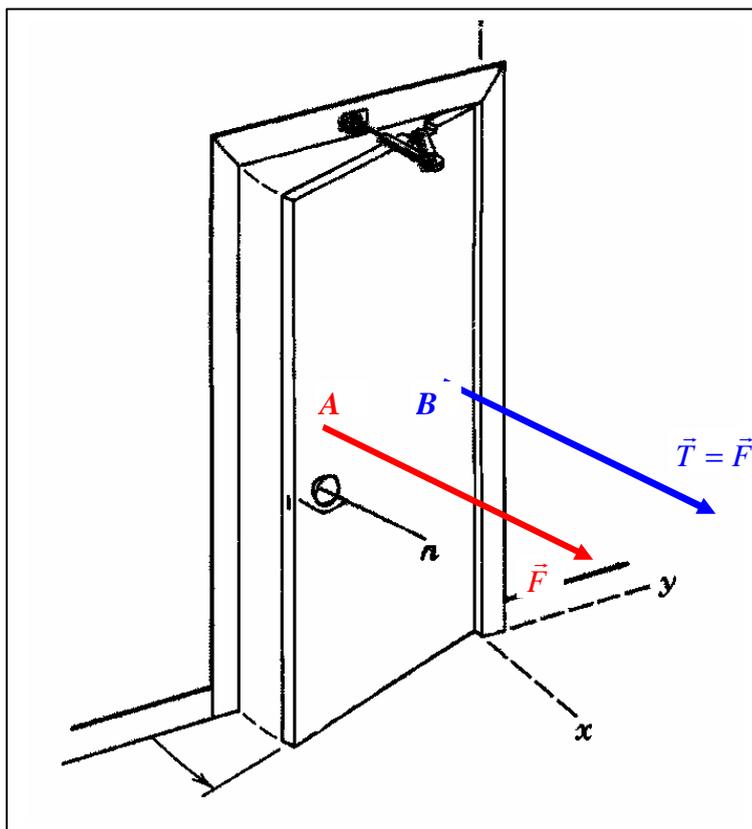
Dans ce cas l'action mécanique du jardinier sur le tuyau d'arrosage peut être représentée par un **vecteur lié** :

- De direction, la direction de \vec{F} : (AB)
- De sens, le sens de \vec{F} : de B vers A
- D'intensité : la norme du vecteur \vec{F}
- De point d'application A
- On note ce **vecteur lié** : $(\vec{F}; A)$

Définition : Une force est une action mécanique représentée par un vecteur lié.

1.3.2 Moments

Exemple : Ouverture de Porte



Un opérateur noté OP_1 exerce une force perpendiculairement à la porte en A : $(\vec{F}; A)$

Un deuxième opérateur noté OP_2 exerce une force perpendiculairement à la porte en B : $(\vec{T}; B)$

Expérience : A au bord de la porte et B tout près de l'axe de rotation.
 $\vec{F} = \vec{T}$

On remarque que l'action mécanique de l'opérateur 1 qui tire en A fait tourner la porte alors que l'action de l'opérateur 2 qui tire en B ne la fait pas tourner.

Conclusion : Il manque une quantité pour caractériser les actions mécaniques des deux opérateurs qui tirent de la même façon mais en des points différents : A pour le premier et B pour le second. Cette quantité est la notion de **moment** qui dépend à la fois du vecteur et de son point d'application. Si on note OP_1 pour désigner l'opérateur qui tire en A, OP_2 pour désigner l'opérateur qui tire en B ; on représente les actions mécaniques de OP_1 et OP_2 sur la porte par les quantités suivantes :

➤ Lorsque l'opérateur 1 tire en A, on modélise l'action mécanique de $(OP_1 \rightarrow porte)$ par les

$$\text{deux quantités suivantes : } \forall X \in \text{espace} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(OP_1 \rightarrow porte) = \vec{F} \\ \vec{M}_X(OP_1 \rightarrow porte) = \overline{XA} \wedge \vec{F} \end{array} \right.$$

momentenXdel'actionmécanique: OP₁ → porte

➤ Lorsque l'opérateur 1 tire en B, on modélise l'action mécanique de $(OP_2 \rightarrow porte)$ par les

$$\text{deux quantités suivantes : } \forall X \in \text{espace} \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(OP_2 \rightarrow porte) = \vec{F} \\ \vec{M}_X(OP_2 \rightarrow porte) = \overline{XB} \wedge \vec{F} \end{array} \right.$$

momentenXdel'actionmécanique: OP₂ → porte

Torseur d'action mécanique :

Soit C un autre point quelconque de l'espace ; le moment résultant en C de l'action mécanique de $(OP_1 \rightarrow porte)$ si l'opérateur tire en A s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{M}_C(OP_1 \rightarrow porte) &= \overline{CA} \wedge \vec{F} \\ &= \overline{CA} \wedge \vec{R}(OP_1 \rightarrow porte) \\ &= [\overline{CX} + \overline{XA}] \wedge \vec{R}(OP_1 \rightarrow porte) \\ &= \underbrace{\overline{XA} \wedge \vec{R}(OP_1 \rightarrow porte)}_{\vec{M}_X(OP_1 \rightarrow porte)} + \overline{CX} \wedge \vec{R}(OP_1 \rightarrow porte) \\ &= \vec{M}_X(OP_1 \rightarrow porte) + \overline{CX} \wedge \underbrace{\vec{R}(OP_1 \rightarrow porte)}_{\vec{F}} \\ &= \vec{M}_X(OP_1 \rightarrow porte) + \overline{CX} \wedge \vec{F} \end{aligned}$$

On retrouve donc la structure de torseur.

Premier Principe de la statique : $OP_1 \rightarrow porte$

Toute action mécanique est entièrement caractérisée d'un point de vue mécanique par un torseur appelé torseur d'action mécanique, ici de l'opérateur 1 sur la porte, dont :

La résultante est un vecteur force : $\vec{R}(OP_1 \rightarrow porte) = \vec{F}$

Le moment résultant est le vecteur noté : $\vec{M}_C(OP_1 \rightarrow porte) = \overline{CA} \wedge \vec{F} = \overline{CA} \wedge \vec{R}(OP_1 \rightarrow porte)$

$$\text{On le note : } \left\{ T(OP_1 \rightarrow porte) \right\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(OP_1 \rightarrow porte) = \vec{F} \\ \vec{M}_C(OP_1 \rightarrow porte) = \overline{CA} \wedge \underbrace{\vec{R}(OP_1 \rightarrow porte)}_{\vec{F}} \end{array} \right.$$

Torseur particulier :

- **Couple :** L'action mécanique de (E) sur (S) est un couple si le torseur des actions mécaniques de (E) sur (S) est de la

$$\text{forme : } \left\{ T(E \rightarrow S) \right\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(E \rightarrow S) = \vec{0} \\ \vec{M}_C(E \rightarrow S) = \text{constante} \end{array} \right\}, \forall C \in \text{espace}$$

- **Force** : Si l'action mécanique de (E) sur (S) est une **force** s'exerçant en un point A : $(\vec{F}; A)$, alors le torseur d'action mécanique de (E) sur (S) est **un glisseur** de la forme :

$$\{T(E \rightarrow S)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(E \rightarrow S) = \vec{F} \\ \vec{M}_C(E \rightarrow S) = \overline{CA} \wedge \vec{F} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(E \rightarrow S) = \vec{F} \\ \vec{M}_A(E \rightarrow S) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

2 Modélisation des actions mécaniques à distance

2.1 Champ de pesanteur

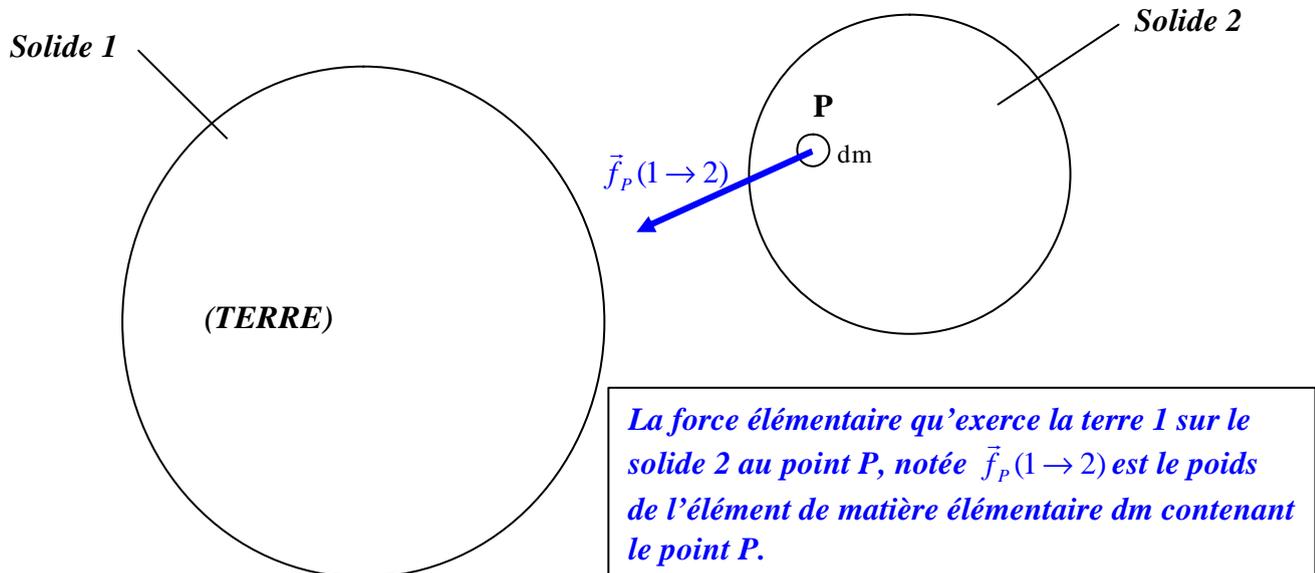
Cette action mécanique à distance est la seule action mécanique à distance que l'on abordera, elle concerne tous les mécanismes fonctionnant sur terre même si, dans certains cas, elle sera négligée devant d'autres beaucoup plus importante.

Profitions de cette action mécanique pour étendre la notion de force :

Modélisation locale de l'action mécanique de pesanteur :

La force qui est une modélisation globale est en fait la somme de toutes les actions mécaniques locales qui agissent sur une surface de contact dans le cas de contact entre solides ou sur un volume dans le cas de la pesanteur.

Nous allons donc partir du modèle d'actions mécaniques locales pour en déduire une modélisation globale.



Pour un solide 2 uniforme, si on note \mathbf{r} sa masse volumique et \vec{g} le vecteur accélération de la pesanteur (que l'on supposera constant sur tout le volume du solide 2) alors l'élément de matière élémentaire dm est égal à $\mathbf{r} dV$ avec dV le volume élémentaire de matière correspondant.

Dans ce cas (modèle très représentatif de la réalité pour les mécanismes évoluant sur terre), la force élémentaire au point P, appelée densité volumique de force de pesanteur s'écrit :

$$\vec{f}(1 \rightarrow 2) = \mathbf{r} \vec{g} dV, \text{ on trouve aussi couramment la notation : } \vec{f}(1 \rightarrow 2) = \vec{f}(\vec{g} \rightarrow 2) = \mathbf{r} \vec{g} dV$$

Modélisation globale de l'action mécanique de pesanteur :

Il suffit de « sommer » toutes les actions mécaniques locales. Dans le cas d'un volume, cette somme revient à intégrer toutes les actions mécaniques locales de pesanteur sur le volume du solide.

Torseur des actions mécaniques de pesanteur de la terre 1 sur le solide 2

Ce torseur s'écrit en un point A quelconque de l'espace :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} = \{T(\vec{g} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\vec{g} \rightarrow 2) \\ \vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 2) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\forall P \in 2} \vec{f}_P(\vec{g} \rightarrow 2) \\ \int_{\forall P \in 2} \overline{AP} \wedge \vec{f}_P(\vec{g} \rightarrow 2) \end{array} \right\}$$

Cette relation est celle relative à n'importe quelle densité volumique de force.

Appliquons la désormais au champ de pesanteur :

$$\{T(\vec{g} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\vec{g} \rightarrow 2) = \int_{\forall P \in 2} \vec{f}_P(\vec{g} \rightarrow 2) = \int_{\forall P \in 2} \vec{g} dm = m\vec{g} \\ \vec{M}_A(\vec{g} \rightarrow 2) = \int_{\forall P \in 2} \overline{AP} \wedge \vec{f}_P(\vec{g} \rightarrow 2) = \int_{\forall P \in 2} \overline{AP} \wedge \vec{g} dm = \left[\int_{\forall P \in 2} \overline{AP} dm \right] \wedge \vec{g} \end{array} \right\}$$

La résultante et le moment de ce torseur sont perpendiculaires, ce qui signifie que ce torseur est à résultante. L'action mécanique de pesanteur est donc modélisable par une force. Il reste donc à déterminer son axe central. Pour cela on va montrer que le centre d'inertie du solide 2 noté G est un point central.

Rappel : *Le centre d'inertie G du solide 2 est le point qui vérifie la relation :*

$$\overline{OG} = \int_{\forall P \in 2} \overline{OP} dm \quad \text{ou bien encore :} \quad \vec{0} = \int_{\forall P \in 2} \overline{GP} dm$$

Il est donc évident en regardant les relations que $\vec{M}_G(\vec{g} \rightarrow 2) = \vec{0}$

Le torseur d'action mécanique de pesanteur s'écrit donc très simplement au point G de la

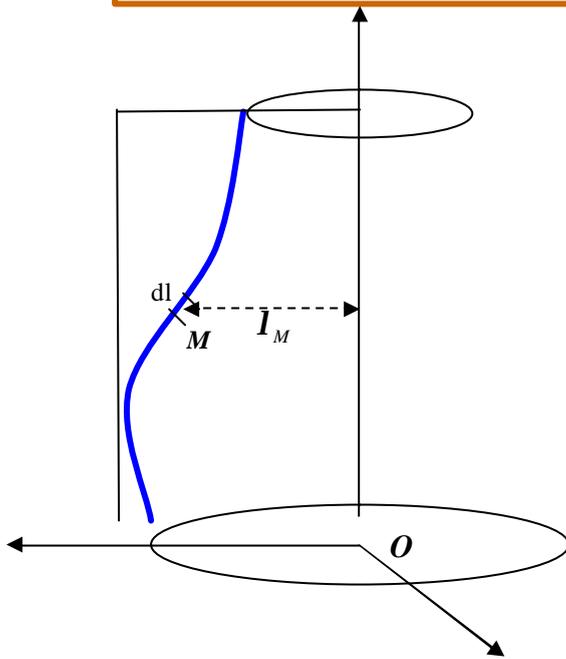
façon suivante : $\{T(\vec{g} \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\vec{g} \rightarrow 2) = m\vec{g} \\ \vec{M}_G(\vec{g} \rightarrow 2) = \vec{0} \end{array} \right\}$

Remarque : Le plus compliqué étant bien souvent de déterminer la position du centre d'inertie G du solide considéré

2.1 Théorèmes de GULDIN

2.1.2 Premier théorème de GULDIN : centre d'inertie d'une courbe plane

Enoncé : *L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe contenu dans son plan est égale à sa longueur multipliée par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie lors de la rotation autour de l'axe.*



Démonstration :

Soit M un point courant de la courbe de longueur L.
Soit dl l'élément élémentaire de la courbe autour de M.
Soit I_M la distance de M à l'axe autour duquel on fait tourner cette courbe.

Soit G le centre d'inertie de la courbe

Comme $\overline{OG} = \frac{1}{L} \int_{\forall M \in \text{courbe}} \overline{OM} dl$, on a

$I_G = \frac{1}{L} \int_{\forall M \in \text{courbe}} I_M dl$ avec I_G distance de G à l'axe de

rotation.

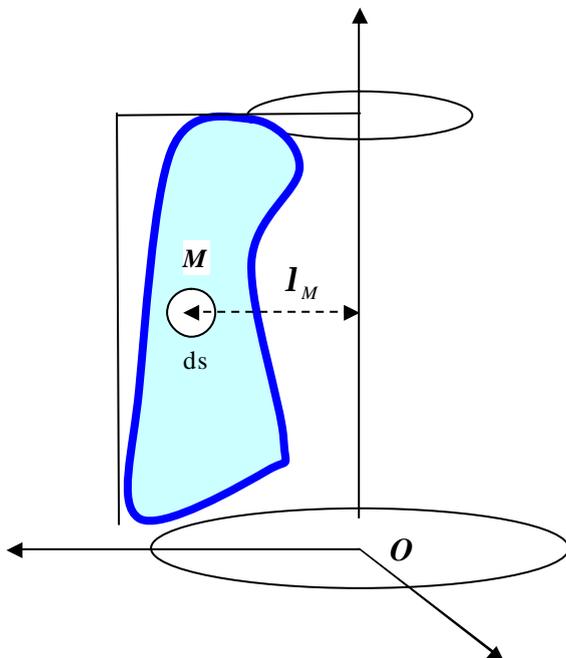
Or S surface engendrée par la courbe en tournant autour de

l'axe vaut : $S = \int_{\forall M \in \text{courbe}} 2pl_M dl = L(2pl_G)$

2.1.2 Second théorème de GULDIN : centre d'inertie d'une surface

plane

Enoncé : *Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe contenu dans son plan est égale à son aire multipliée par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie lors de la rotation autour de l'axe.*



Démonstration :

Soit M un point courant de la surface d'aire S.

Soit ds la surface élémentaire autour de M.

Soit I_M la distance de M à l'axe autour duquel on fait tourner cette surface.

Soit G le centre d'inertie de la courbe

Comme $\overline{OG} = \frac{1}{S} \int_{\forall M \in \text{surface}} \overline{OM} ds$, on a

$I_G = \frac{1}{S} \int_{\forall M \in \text{surface}} I_M ds$ avec I_G distance de G à l'axe de

rotation.

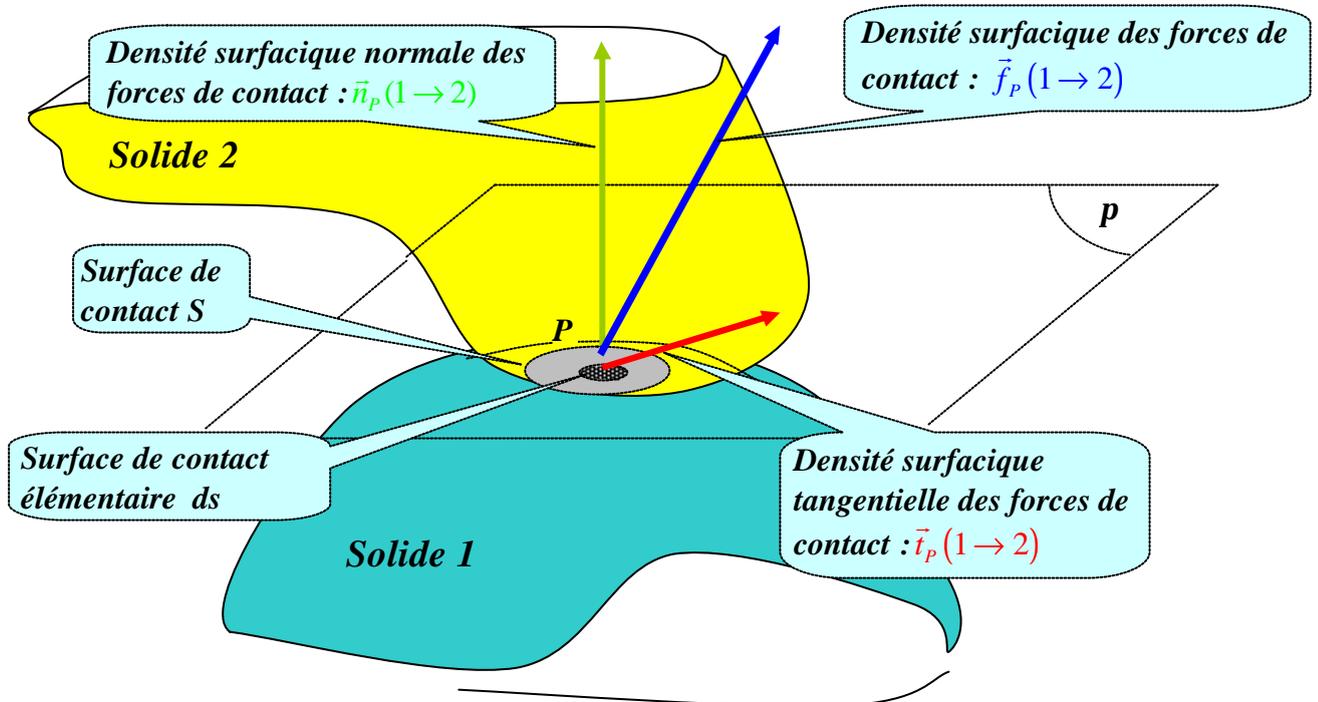
Or V volume engendré par la surface en tournant autour de

l'axe vaut : $V = \int_{\forall M \in \text{surface}} 2pl_M ds = S(2pl_G)$

3 Modélisation des actions mécaniques de contact

3.1 Modélisation locale : torseur d'actions mécaniques locales

Tout contact réel entre 2 solides S_1 et S_2 a lieu sur une surface même infinitésimale : (S)
 L'action mécanique de S_1 sur S_2 est caractérisée par une densité surfacique de forces (homogène à une pression qui dépend dans le cas le plus général du point P où on la considère.
 On admet l'existence en P d'un plan tangent commun au deux surfaces en contact que l'on note \mathbf{p}



Définitions :

- $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2)$ est la **densité surfacique en P des forces de contact de S_1 sur S_2** .
- $\vec{n}_p(1 \rightarrow 2)$ est la **densité surfacique normale en P des forces de contact de S_1 sur S_2** .

C'est la composante de $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2)$ sur la normale au plan tangent commun \mathbf{p} .

Si on note \vec{n} un des deux vecteurs normaux unitaires au plan tangent commun \mathbf{p} , on a

$$\vec{n}_p(1 \rightarrow 2) = [\vec{f}_p(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{n}] \vec{n}$$

- $\vec{t}_p(1 \rightarrow 2)$ est la **densité surfacique tangentielle en P des forces de contact de S_1 sur S_2** . C'est la composante de $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2)$ sur le plan tangent commun \mathbf{p} . On a la relation

$$\vec{t}_p(1 \rightarrow 2) = \vec{f}_p(1 \rightarrow 2) - \vec{n}_p(1 \rightarrow 2)$$

3.2 Modélisation globale

Il suffit de sommer toutes les actions mécaniques locales sur la totalité de la surface de contact (S) :
 $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2)$ est la **densité surfacique en P des forces de contact de S_1 sur S_2** qui s'exerce sur la surface élémentaire ds, donc l'action mécanique élémentaire qui s'exerce en P est le glisseur ou la force $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2) ds$.

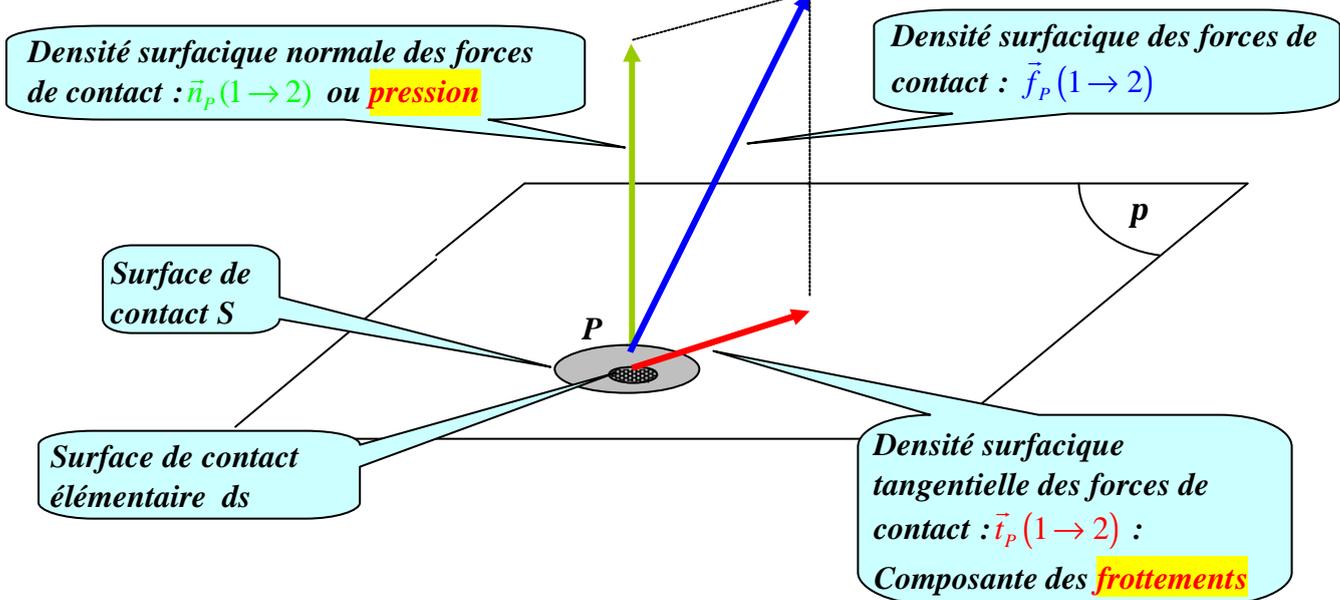
Son moment en un point A quelconque est le moment élémentaire : $\vec{AP} \wedge \vec{f}_p(1 \rightarrow 2) ds$

En généralisant cette action mécanique élémentaire en P à la totalité de la surface de contact (S) on obtient le torseur des actions mécaniques de contact de S₁ sur S₂ :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \int_{\forall P \in (S)} \vec{f}_P(1 \rightarrow 2) ds \\ \vec{M}_A(1 \rightarrow 2) = \int_{\forall P \in (S)} \vec{AP} \wedge \vec{f}_P(1 \rightarrow 2) ds \end{array} \right.$$

3.3 Contact avec frottement : Lois de Coulomb

Reprenons le schéma simplifié d'un contact entre deux solides :



Les lois de Coulomb nous renseignent sur les densités surfaciques normales et tangentielles des forces de contact. Deux cas de figures sont à distinguer, suivant qu'il y ait glissement ou non (on parle alors d'adhérence) au niveau du contact.

Premier cas : Il y a glissement en P $\vec{V}(P \in 2/1) \neq \vec{0}$

En effet, la vitesse de glissement au niveau du point P entre les deux solides 1 et 2 vaut :

$$\vec{V}(P \in 1/2)$$

Dans ce cas le modèle des lois de Coulomb nous dit que la densité surfacique des forces de contact est telle que :

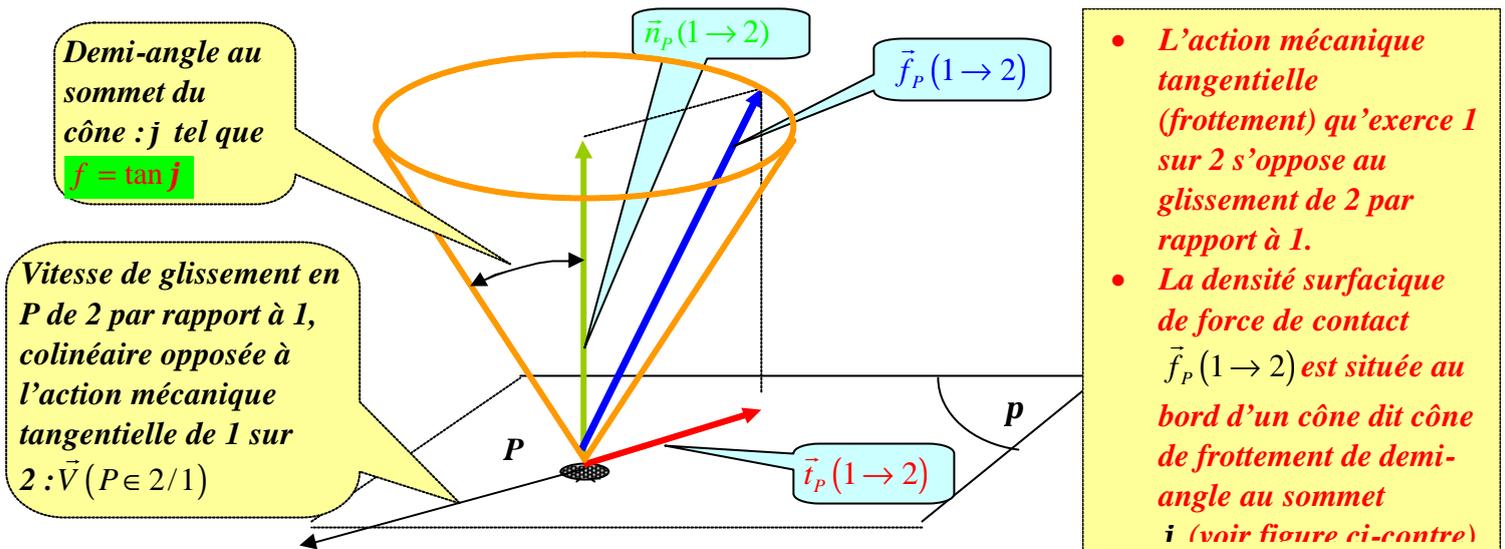
- La composante tangentielle de l'action mécanique qu'exerce 1 sur 2 en P est colinéaire et opposée à la vitesse de glissement de 2 par rapport à 1. Ce qui se traduit mathématiquement

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{t}_P(1 \rightarrow 2) \wedge \vec{V}(P \in 2/1) = \vec{0} \\ \vec{t}_P(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(P \in 2/1) < 0 \end{array} \right.$$

- La norme de la densité surfacique tangentielle des forces de contact en P est égale au produit d'un coefficient (noté **f** : *coefficient de frottement*) multiplié par la norme de la densité normale des forces de contact en P. Ce qui se traduit simplement par la relation suivante :

$$\|\vec{t}_P(1 \rightarrow 2)\| = f \|\vec{n}_P(1 \rightarrow 2)\|$$

On peut représenter cela de façon simplifiée (sans les deux solides concernés) de la manière suivante :

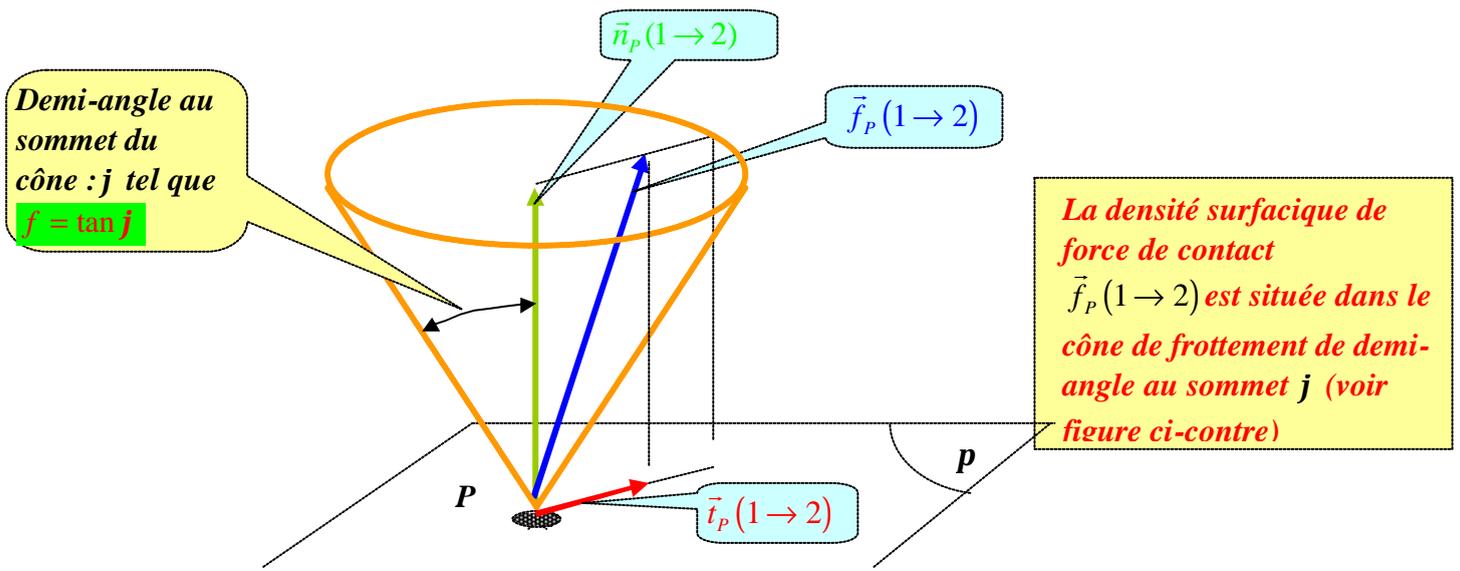


Deuxième cas : Il n'y a pas glissement en P, il y a adhérence : $\vec{V}(P \in 2/1) = \vec{0}$

Dans ce cas le modèle des lois de Coulomb nous dit que la densité surfacique des forces de contact est telle que :

- La norme de la densité surfacique tangentielle des forces de contact en P est inférieure au produit d'un coefficient (noté **f : coefficient de frottement**) multiplié par la norme de la densité normale des forces de contact en P. Ce qui se traduit simplement par la relation suivante : $\|\vec{t}_p(1 \rightarrow 2)\| \leq f \|\vec{n}_p(1 \rightarrow 2)\|$

On peut représenter cela de façon simplifiée (sans les deux solides concernés) de la manière suivante :



Remarque :

Le coefficient f en cas d'adhérence est normalement toujours supérieure au coefficient de frottement en cas de glissement. Ici, on se situe dans le modèle où l'on considère les deux coefficients égaux (c'est pourquoi on ne les a pas distingués).

Valeurs :

	f
<i>Acier - Acier</i>	<i>0.1</i>
<i>Bronze - Bronze</i>	<i>0.2</i>
<i>Fonte - Bronze</i>	<i>0.1</i>
<i>Cuir - Métal</i>	<i>0.25</i>
<i>Bois - Bois</i>	<i>0.4</i>
<i>Métal - Bois</i>	<i>0.3</i>
<i>Paquette - Disque</i>	<i>0.3</i>
<i>Pneu - Bitume</i>	<i>0.6</i>

Cas particulier : étude à la limite du glissement

Ce cas particulier permet d'étudier un cas de rupture d'équilibre.

On se place donc à l'équilibre (avec les équations que cela donne) et dans le cas de glissement (donc en mouvement ce qui est un peu contradictoire avec l'équilibre) pour les lois de Coulomb (avec les égalités et hypothèses de direction que cela entraîne)

Cas particulier : contact sans frottement

C'est le cas lorsque les coefficients de frottement sont suffisamment petits pour négliger les frottements.

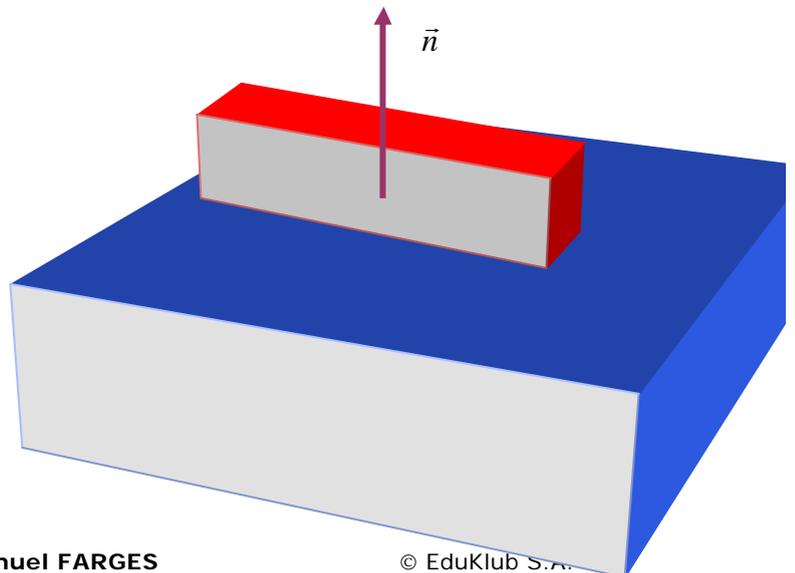
Dans ce cas la densité surfacique tangentielle des forces de contact $\vec{t}_p(1 \rightarrow 2)$ est négligée et la densité surfacique des forces de contact se réduit donc à la densité surfacique normale des forces de contact : $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2) = \vec{n}_p(1 \rightarrow 2)$

Conclusion : La densité surfacique des forces de contact est perpendiculaire au plan tangent commun.

3.4 Contact avec frottement : Cas d'un contact plan-plan

Dans ce cas tous les plans locaux tangents communs à S_1 et S_2 sont confondus et donc toutes les normales aux surfaces de contact locales (à chaque point P du contact) sont identiques.

On peut donc facilement passer à une étude globale du contact avec frottement puisque la direction de toutes les densités surfaciques normales de forces est le même, c'est à dire la normale au plan de contact.



Définitions : on appelle :

Effort normal de contact $\vec{N}(1 \rightarrow 2) = \int_{\forall P \in \text{plandecontact}} \vec{n}_p(1 \rightarrow 2) ds$ colinéaire à \vec{n}

Effort tangentiel de contact $\vec{T}(1 \rightarrow 2) = \int_{\forall P \in \text{plandecontact}} \vec{t}_p(1 \rightarrow 2) ds$ dans le plan de contact \mathbf{p}

Les lois de Coulomb s'écrivent alors :

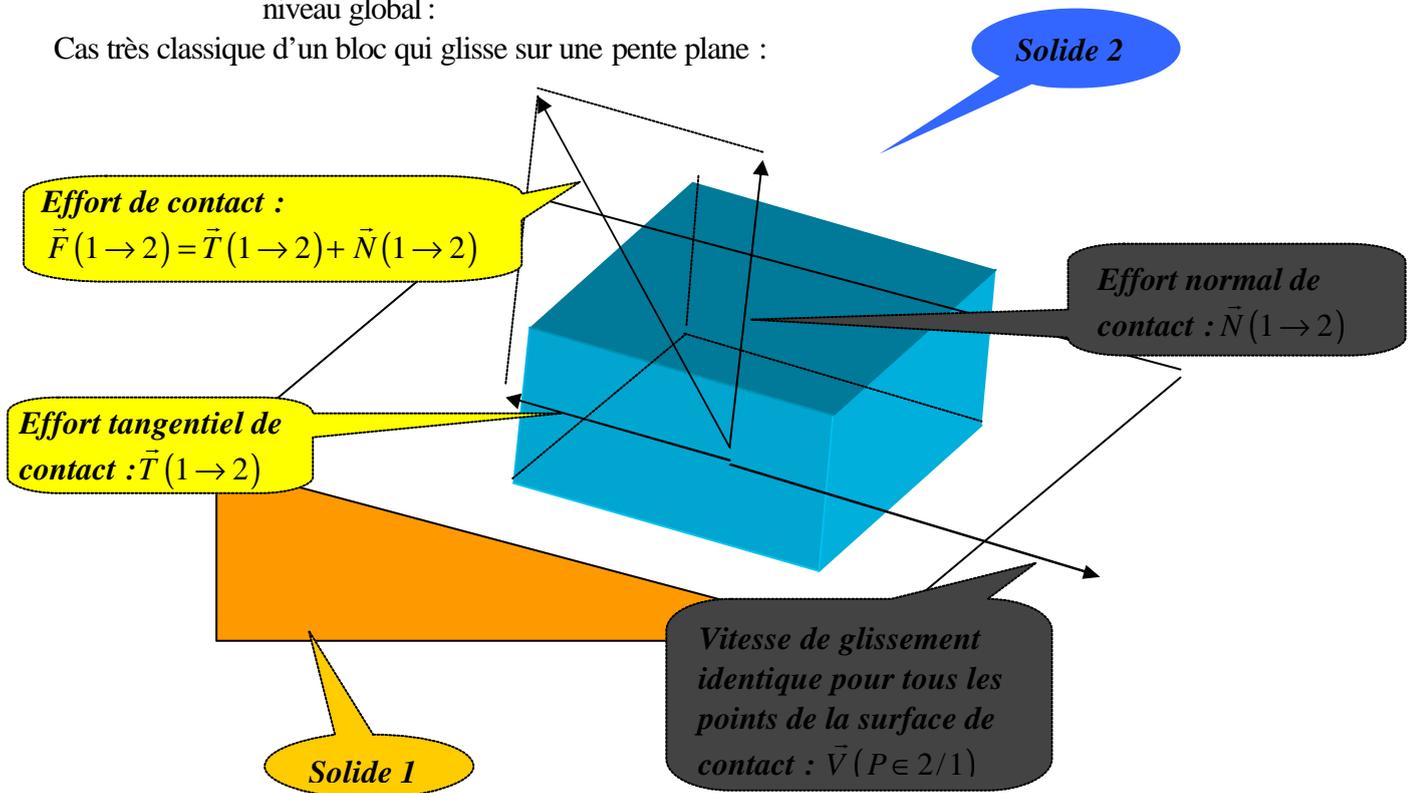
- Si S_1 et S_2 n'ont pas de mouvement relatif : contact avec adhérence

Pas de renseignement particulier sur la direction de l'effort tangentiel, si ce n'est qui est dans le plan de contact.

- Si S_1 et S_2 sont en mouvement relatif :

- Soit les deux solides sont en translation et alors la vitesse de glissement étant la même pour tous les points, on peut généraliser les lois de Coulomb locales au niveau global :

Cas très classique d'un bloc qui glisse sur une pente plane :



Tous les efforts normaux locaux de contact sont suivant la normale au plan de contact, donc l'intégrale (effort normal) c'est à dire la somme est aussi suivant la normale au plan de contact. Tous les efforts tangentiels locaux de contact sont opposés à la vitesse de glissement (qui est ici, en tout point du contact identique), donc l'intégrale (effort tangentiel) c'est à dire la somme est aussi opposée à la vitesse de glissement.

Etant donné que les directions des efforts normaux et tangentiels locaux sont constantes sur la surface de contact et que puisque l'on glisse on a la relation locale : $\|\vec{t}_p(1 \rightarrow 2)\| = f \|\vec{n}_p(1 \rightarrow 2)\|$, on retrouve cette relation au niveau global, c'est à dire : $\|\vec{T}(1 \rightarrow 2)\| = f \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$.

Ce qui se présente sous la forme simplifiée : $T = f N$

La force de contact se situe donc encore sur le cône de frottement.

- Soit les deux solides ne sont pas en translation et on ne peut pas généraliser les lois locales. Il faut alors étudier localement le contact et l'intégrer sur toute la surface de contact.

3.5 Contact avec frottement : Cas d'un contact ponctuel

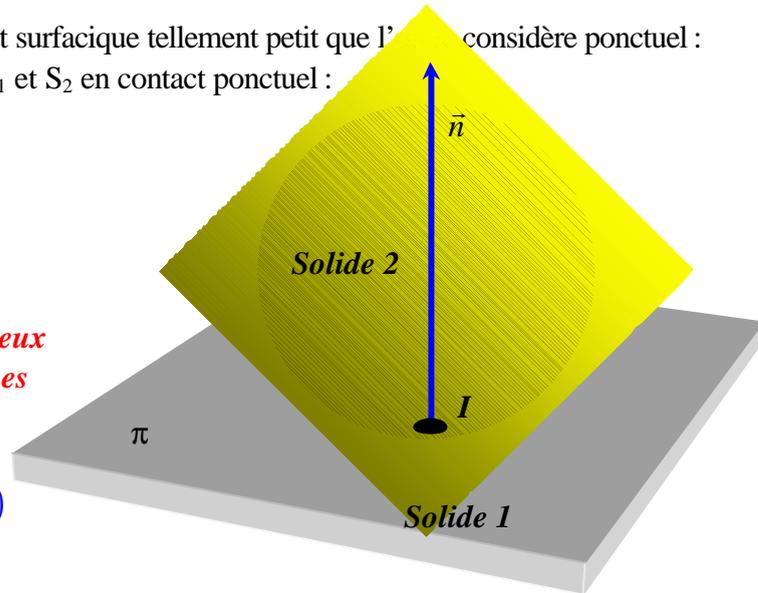
Un contact ponctuel est un contact surfacique tellement petit que l'on considère ponctuel :

On définit à partir des 2 solides S_1 et S_2 en contact ponctuel :

- I le point du contact
- π le plan tangent commun
- \vec{n} la normale à π

Dans le cas d'un contact strictement ponctuel entre deux solides, les actions mécaniques locales et globales sont confondues :

- $\vec{n}_I(1 \rightarrow 2) = \vec{N}(1 \rightarrow 2)$
- $\vec{t}_I(1 \rightarrow 2) = \vec{T}(1 \rightarrow 2)$
- $\vec{f}_I(1 \rightarrow 2) = \vec{F}(1 \rightarrow 2)$



En théorie donc l'action mécanique de 1 sur 2 n'a pas de moment en I. En fait, n'importe quel contact n'est jamais ponctuel mais surfacique, ce qui engendre un moment en I issu des actions mécaniques locales. L'action mécanique globale du solide 1 sur le solide 2 se modélise donc dans le cas général par le torseur suivant :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\}_I = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(1 \rightarrow 2) = \vec{N}(1 \rightarrow 2) + \vec{T}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_I(1 \rightarrow 2) \end{array} \right\}$$

Les lois de Coulomb locales sont donc très aisément transposable au niveau globale aussi bien lorsqu'il y a glissement que lorsqu'il n'y a pas de glissement.

L'intérêt de ce cas réside dans la « généralisation » possible (suivant le modèle adopté) des lois de Coulomb, au roulement et au pivotement :

Rappel de cinématique :

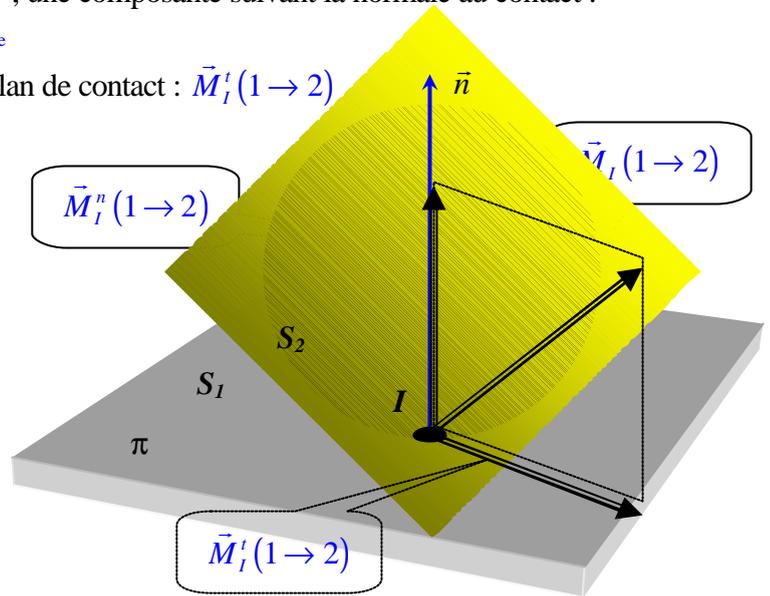
Le roulement et le pivotement de deux solides en contact ponctuel sont quantifiés à partir du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}(2/1)$:

- ✓ La projection de $\vec{\Omega}(2/1)$ sur la normale au contact, noté $\vec{\Omega}_p(2/1)$, est appelée vecteur vitesse de rotation de pivotement : $\vec{\Omega}_p(2/1) = [\vec{\Omega}(2/1) \cdot \vec{n}] \vec{n}$
- ✓ La projection de $\vec{\Omega}(2/1)$ sur le plan tangent commun π , noté $\vec{\Omega}_r(2/1)$, est appelée vecteur vitesse de rotation de roulement : $\vec{\Omega}_r(2/1) = \vec{\Omega}(2/1) - \vec{\Omega}_p(2/1)$

Tout comme pour le vecteur vitesse de rotation du mouvement de 2/1 : $\vec{\Omega}(2/1)$, on peut décomposer le moment en I des actions mécaniques de 1 sur 2 en deux vecteurs :

$$\vec{M}_I(1 \rightarrow 2) = \underbrace{\vec{M}_I^n(1 \rightarrow 2)}_{\text{composante normale}} + \underbrace{\vec{M}_I^t(1 \rightarrow 2)}_{\text{composante tangentielle}}$$

et une composante suivant le plan de contact : $\vec{M}_I^t(1 \rightarrow 2)$



Loi de Coulomb générale d'un contact ponctuel:

Loi de Coulomb relative au glissement :

1^{er} cas : glissement : $\vec{V}(I \in 2/1) \neq \vec{0}$

- L'action mécanique tangentielle (frottement) de 1 sur 2 s'oppose au glissement de 2 par rapport à 1 :

$$\begin{cases} \vec{T}(1 \rightarrow 2) \wedge \vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0} \\ \vec{T}(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{V}(I \in 2/1) < 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \vec{T}(1 \rightarrow 2)$ et $\vec{V}(I \in 2/1)$ sont colinéaires opposés

- $\|\vec{T}(1 \rightarrow 2)\| = f \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$ f : coefficient de frottement entre 1 et 2

2^{ème} cas : non glissement : $\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$

- $\|\vec{T}(1 \rightarrow 2)\| \leq f \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$

Loi de Coulomb relative au pivotement :

1^{er} cas : pivotement : $\vec{\Omega}_p(2/1) \neq \vec{0}$

- Le moment normal des actions mécaniques de 1 sur 2 s'oppose au pivotement de 2 par rapport à 1 :

$$\vec{\Omega}_n(2/1) \cdot \vec{M}_I^n(1 \rightarrow 2) < 0 \Leftrightarrow \vec{\Omega}_n(2/1) \text{ et } \vec{M}_I^n(1 \rightarrow 2) \text{ sont colinéaires opposés}$$

- $\|\vec{M}_I^n(1 \rightarrow 2)\| = d \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$

d : coefficient de résistance au pivotement, en mètre

2^{ème} cas : non pivotement : $\vec{\Omega}_p(2/1) = \vec{0}$

- $\|\vec{M}_I^n(1 \rightarrow 2)\| \leq d \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$

Loi de Coulomb relative au roulement :

1^{er} cas : roulement : $\vec{\Omega}_r(2/1) \neq \vec{0}$

- Le moment tangentiel des actions mécaniques de 1 sur 2 s'oppose au roulement de 2 par rapport à 1 :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}_r(2/1) \wedge \vec{M}_I^t(1 \rightarrow 2) = \vec{0} \\ \vec{\Omega}_r(2/1) \cdot \vec{M}_I^t(1 \rightarrow 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{\Omega}_r(2/1) \text{ et } \vec{M}_I^t(1 \rightarrow 2) \text{ sont colinéaires opposés}$$

- $\|\vec{M}_I^t(1 \rightarrow 2)\| = h \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$

h : coefficient de résistance au roulement, en mètre

2^{ème} cas : non roulement : $\vec{\Omega}_r(2/1) = \vec{0}$

- $\|\vec{M}_I^t(1 \rightarrow 2)\| \leq h \|\vec{N}(1 \rightarrow 2)\|$

Cas implicite dans les énoncés : cas du contact parfaitement ponctuel

Le contact à lieu en un unique point I, il n'y a donc pas de moment d'action mécanique au point de contact. L'action mécanique qu'exerce 1 sur 2 est donc représentée par le glisseur :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\}_I = \begin{cases} \vec{F}(1 \rightarrow 2) = \vec{N}(1 \rightarrow 2) + \vec{T}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{0} \end{cases}$$

On ne prend donc pas en compte le pivotement et le glissement dans ce cas qui constituera la plupart si ce n'est l'ensemble des énoncés rencontrés dans les sujets de concours.

3.6 Contact sans frottement.

Lors d'un contact, c'est à dire d'une liaison, entre deux solides (1 et 2) et lorsque l'on considère que les frottements sont négligeables ou non pris en compte, on peut donner la forme de l'action mécanique qu'exerce un des deux solides sur l'autre.

Nous allons donc le faire dans le cas de chacune des liaisons normalisées vues en cinématique dans le cas de la modélisation des liaisons entre les solides.

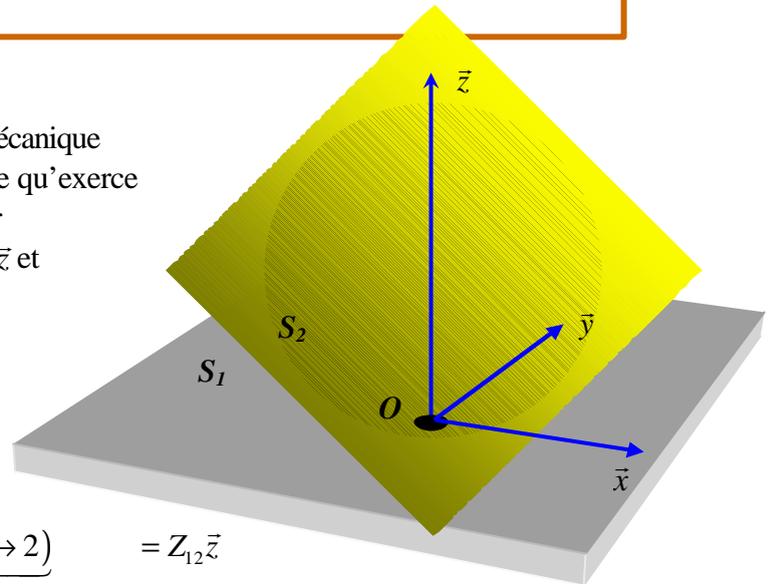
En intégrant toutes les actions mécaniques locales, qui sont normales au contact puisqu'il n'y a pas de frottement : $\vec{f}_p(1 \rightarrow 2) = \vec{n}_p(1 \rightarrow 2)$, sur l'ensemble des surfaces de contact entre les deux solides 1 et 2, on obtient le torseur d'action mécanique transmissible par la liaison.

Ce torseur se réduit en un point O quelconque avec les notations suivantes :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\}_O = \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_O(1 \rightarrow 2) \end{cases} = \begin{cases} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{cases}_{(x_2, y_2, z_2)} \text{ avec } \begin{cases} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_O(1 \rightarrow 2) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{cases}$$

Cas de la liaison ponctuelle vue précédemment dans les lois de Coulomb

Le contact étant strictement ponctuel, l'action mécanique qu'exerce 1 sur 2 ou l'opposée, c'est à dire celle qu'exerce 2 sur 1, soit l'action mécanique transmissible par la liaison ponctuelle sans frottement de normale \vec{z} et de point de contact O est telle que :



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(1 \rightarrow 2) = \underbrace{\vec{N}(1 \rightarrow 2)}_{\text{composante normale: suivant } \vec{z}} + \underbrace{\vec{T}(1 \rightarrow 2)}_{\text{composante tangentielle: frottement: } \vec{0}} = Z_{12} \vec{z} \\ \vec{M}_O(1 \rightarrow 2) = \vec{0} \end{array} \right.$$

On obtient donc la forme du torseur d'action mécanique transmissible par une liaison ponctuelle sans frottement de normale \vec{z} et de point de contact O :

$$\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x; y; z)}$$

Nous verrons en dynamique que dans liaisons sans frottement que l'on qualifie alors de parfaites, la puissance des actions mutuelles de contact entre les deux solides est nulle.

Ceci se traduit par une relation entre les torseurs cinématiques et d'actions mécaniques transmissibles qui nous permet de déduire la forme du torseur des actions mécaniques transmissibles à partir de la connaissance du torseur cinématique d'une liaison.

Cette relation s'écrit : $\{T(1 \rightarrow 2)\} \{V(2/1)\} = 0$

Rappel de notation : $\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_x & v_x \\ \mathbf{w}_y & v_y \\ \mathbf{w}_z & v_z \end{Bmatrix}_{(x; y; z)}$ et $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(x; y; z)}$

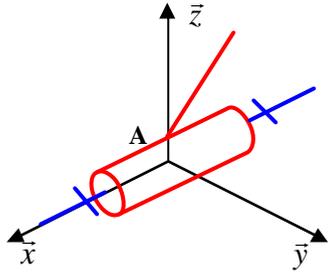
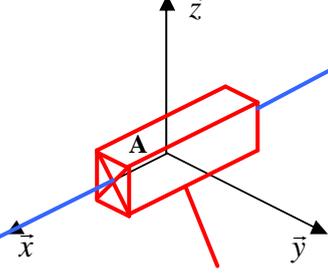
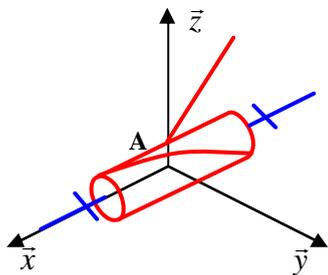
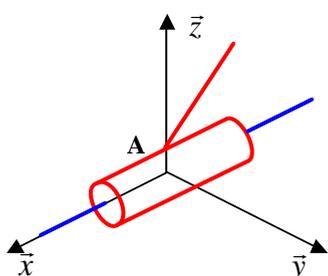
La relation entre les deux torseurs s'écrit donc :

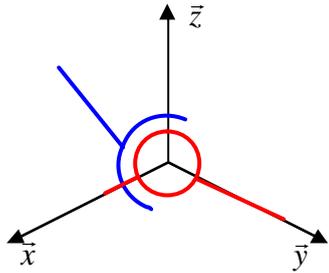
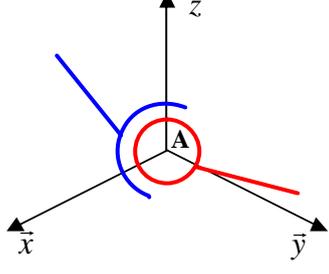
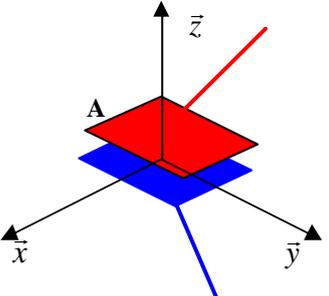
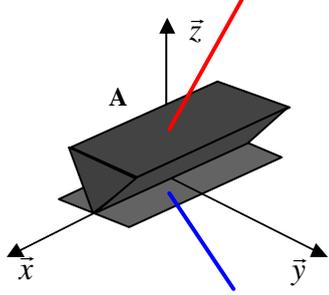
$$P(1 \leftrightarrow 2) = 0 = X_{12}v_x + Y_{12}v_y + Z_{12}v_z + L_{12}w_x + M_{12}w_y + N_{12}w_z$$

Les deux torseurs sont donc complémentaires au sens où les zéros de l'un correspondent aux composantes non nulles de l'autres.

En effet, toutes les composantes de chaque torseur étant indépendantes, le seul moyen de vérifier la relation ci-dessus est d'annuler chaque terme.

Ce qui donne :

<p>Liaison pivot 1 degré de liberté</p>		$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} w_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_P (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$	<p>En tout point P de l'axe de rotation (A; \bar{x})</p>
<p>Liaison glissière 1 degré de liberté</p>		$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_P (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$	<p>En tout point P de l'espace</p>
<p>Liaison hélicoïdale 1 degré de liberté</p>		$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} w_x & v_x = \pm p w_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} = \mp p X_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_P (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$	<p>En tout point P de l'axe de rotation (A; \bar{x})</p>
<p>Liaison pivot glissante 2 degré de liberté</p>		$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} w_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$ $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_P (\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})$	<p>En tout point P de l'axe de rotation (A; \bar{x})</p>

<p>Liaison sphérique à doigt 2 degré de liberté</p>		$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} w_x & 0 \\ w_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x;\bar{y};\bar{z})}$ $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(x;\bar{y};\bar{z})}$	<p>En A</p>
<p>Liaison rotule 3 degré de liberté</p>		$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} w_x & 0 \\ w_y & 0 \\ w_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x;\bar{y};\bar{z})}$ $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x;\bar{y};\bar{z})}$	<p>En A</p>
<p>Liaison appui plan 3 degré de liberté</p>		$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ w_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x;\bar{y};\bar{z})}$ $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x;\bar{y};\bar{z})}$	<p>En tout point P de l'espace</p>
<p>Liaison linéaire rectiligne 4 degré de liberté</p>		$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} w_x & v_x \\ 0 & v_y \\ w_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x;\bar{y};\bar{z})}$ $\{T(1 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x;\bar{y};\bar{z})}$	<p>En tout point P de la droite de contact : ici (A; x-bar)</p>

